E S S E C

Option générale

MATHEMATIQUES 2

Vendredi 13 mai 1994 de 14h à 18h

Les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21cm de long x 15cm de large sont autorisées.

Le problème a pour objet l'étude d'une marche aléatoire sur un cube (partie II).
Dans la partie I, on établit quelques résultats matriciels utilisés dans la suite.

PARTIE I

1°) Etude de suites récurrentes linéaires.

a) On considère l'ensemble S des suites réelles $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant pour tout entier $n \geq 1$:

(1) $\quad 9u_{n+3} - 9u_{n+2} - 7u_{n+1} + 7u_n = 0.$

Etablir que S est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

b) Résoudre l'équation $9x^3 - 9x^2 - 7x + 7 = 0$.

c) Déterminer les suites géométriques non nulles $(r^n)_{n\geq 1}$ appartenant à S.

d) On considère une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ appartenant à S.

- Exprimer en fonction de u_1, u_2, u_3 trois nombres réels α, β, γ tels que:

$$\begin{cases} u_1 = \alpha + \frac{\sqrt{7}}{3}\beta - \frac{\sqrt{7}}{3}\gamma. \\ u_2 = \alpha + \frac{7}{9}\beta + \frac{7}{9}\gamma. \\ u_3 = \alpha + \frac{7\sqrt{7}}{27}\beta - \frac{7\sqrt{7}}{27}\gamma. \end{cases}$$

(On formera $9u_3 - 7u_1$. On donnera les expressions exactes de α, β, γ).

- On associe à la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par:

$$v_n = u_n - \alpha - \beta\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n - \gamma\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n.$$

Etablir qu'elle appartient à S, et en déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = 0$.
Exprimer enfin u_n en fonction de n.

e) En déduire que les trois suites obtenues ci-dessus au (c) forment une base de l'espace vectoriel S.

2°) Etude des puissances d'une matrice.

On étudie la suite des puissances d'une matrice réelle d'ordre 4 notée M et satisfaisant les deux conditions suivantes:

(2) $9M^4 - 9M^3 - 7M^2 + 7M = 0$.

(3) Les matrices M, M^2, M^3 sont linéairement indépendantes.

a) On se propose d'établir, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'existence et l'unicité de trois nombres réels a_n, b_n, c_n tels que:

(4) $M^n = a_nM + b_nM^2 + c_nM^3$.

- Etablir, pour tout entier $n \geq 1$, l'unicité des réels a_n, b_n, c_n (s'ils existent).
- Déterminer a_n, b_n, c_n pour $n = 1, 2, 3, 4$.
- Etablir par récurrence l'existence de a_n, b_n, c_n dans le cas général.

(On explicitera a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n).

b) Vérifier par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, on a: $a_n + b_n + c_n = 1$.

c) En multipliant par M^{n-1} la relation (2), établir que les suites (a_n), (b_n), (c_n) vérifient la relation (1).

d) En appliquant à la suite (b_n) les résultats obtenus à la question 1°, établir pour tout entier $n \geq 1$ la formule suivante:

$$b_n = \frac{9}{14}\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n + \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n\right].$$

Déterminer de même les expressions de a_n et c_n.

3°) Etude d'un cas particulier.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ est rapporté à sa base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4), et l'on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ défini par:

$$f(e_1) = e_2 \quad ; \quad f(e_2) = \frac{e_1}{3} + \frac{2e_3}{3} \quad ; \quad f(e_3) = \frac{2e_2}{3} + \frac{e_4}{3} \quad ; \quad f(e_4) = e_4 .$$

a) Ecrire la matrice A de f dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4), calculer A^2, A^3, A^4, puis prouver que la matrice A satisfait aux conditions (2) et (3). Ainsi donc:

$$A^n = a_nA + b_nA^2 + c_nA^3 \quad (n \geq 1).$$

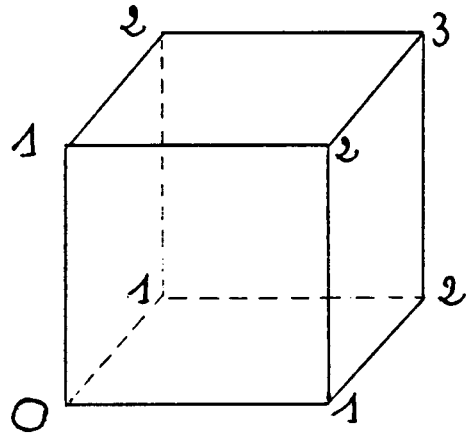
b) Ecrire la matrice B de f dans la base (e_4, e_3, e_2, e_1) et montrer que:

$$B^n = a_nB + b_nB^2 + c_nB^3 \quad (n \geq 1).$$

***

PARTIE II

On considère un cube, dont les sommets sont numérotés 1, 2, 3 selon qu'ils sont situés à une, deux, trois arêtes du sommet O:



A] On considère dans cette partie le mouvement d'un point P, situé au sommet O du cube à l'instant 0, puis se déplaçant dans l'ensemble des sommets du cube selon les deux règles suivantes:

A1) lorsque le point P atteint à l'instant n un sommet S du cube autre que le sommet 3, il se situe à l'instant n+1, et de façon équiprobable, sur l'un des trois sommets du cube reliés à S par une arête.
A2) lorsque le point P atteint le sommet 3 du cube, il y reste définitivement.

Pour tout entier naturel n, on désigne par:
- X_n la variable aléatoire indiquant le numéro du sommet où se trouve le point à l'instant n (en particulier, on a $X_0 = 0$).
- T la variable aléatoire indiquant, s'il existe, l'instant (nécessairement impair et supérieur ou égal à 3) où, pour la première fois, le point atteint le sommet 3.

1°) Lois des variables aléatoires X_n.
Pour tout entier naturel n, on note U_n le vecteur-colonne dont les composantes sont (de haut en bas) les probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$.
a) Expliciter U_0, U_1, U_2.
b) Exprimer pour i = 0, 1, 2, 3 la probabilité $P(X_{n+1} = i)$ en fonction des probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$.
En déduire une matrice M, d'ordre 4, telle que, pour tout entier $n \geq 0$:

$$U_{n+1} = MU_n.$$

c) Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer U_n en fonction de M^n et U_0, et en déduire l'expression du vecteur U_n et de la loi de X_n en fonction des réels a_n, b_n, c_n définis à la partie I.

2°) Loi de la variable aléatoire T.

a) Comparer les événements " $X_{2n} = 2$ et $X_{2n+1} = 3$" et "$T = 2n+1$".
En déduire la probabilité de l'événement "$T = 2n+1$".

b) Vérifier alors que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(T=2n+1) = 1.$$

c) Calculer enfin l'espérance de la variable aléatoire T.

B] On considère dans cette partie le mouvement d'un point P, situé au sommet O du cube à l'instant 0, puis se déplaçant dans l'ensemble des sommets du cube selon les deux règles suivantes:

B1) le point P est à l'instant 1 sur l'un des trois sommets du cube reliés à O par une arête puis, lorsqu'il atteint à l'instant $n \geq 1$ un sommet S du cube autre que le sommet 0, il se situe à l'instant n+1, et de façon équiprobable, sur l'un des trois sommets du cube reliés à S par une arête.
B2) lorsque le point P revient au sommet O du cube, il y reste définitivement.

Pour tout entier naturel n, on désigne par:
- Y_n la variable aléatoire indiquant le numéro du sommet où se trouve le point à l'instant n (en particulier, on a $Y_1 = 1$).
- R la variable aléatoire indiquant, s'il existe, l'instant (nécessairement pair et supérieur ou égal à 2) où, pour la première fois, le point revient au sommet O.

1°) Lois des variables aléatoires Y_n.

Pour tout entier naturel n, on note V_n le vecteur-colonne dont les composantes sont (de haut en bas) les probabilités $P(Y_n = 0)$, $P(Y_n = 1)$, $P(Y_n = 2)$, $P(Y_n = 3)$.

a) Déterminer une matrice M, d'ordre 4, telle que l'on ait pour tout entier $n \geq 1$:

$$V_{n+1} = MV_n.$$

b) Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer V_n en fonction de M^{n-1} et V_1, et en déduire l'expression du vecteur V_n et de la loi de Y_n en fonction des réels a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1} définis à la partie I.

2°) Loi de la variable aléatoire R.

a) Comparer pour $n \geq 1$ les événements " $Y_{2n-1} = 1$ et $Y_{2n} = 0$" et "$R = 2n$".
En déduire la probabilité de l'événement "$R = 2n$".

b) Vérifier alors que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(R=2n) = 1.$$

c) Calculer enfin l'espérance de la variable aléatoire R.